

6-19-16

ΑσκΈστω $f_v: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_v(x) = \frac{x}{v}$, είδαμε ότι αν $f(x) = 0$, $\forall x \in (0, +\infty)$, έχουμε $f_v \xrightarrow{p.o.} f$ στο $(0, +\infty)$ Όπως, αν $\varepsilon > 0$ και $x \in (0, +\infty)$

$$|f_v(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \frac{x}{v} < \varepsilon \Rightarrow v > \frac{x}{\varepsilon}$$

Οπότε, $N_\varepsilon(x) = \left[\frac{x}{\varepsilon} \right] + 1$, αλλά $\sup \{ N_\varepsilon(x) : x \in (0, +\infty) \} = +\infty$ Άρα, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο $(0, +\infty)$.ΑσκΈστω $f_v(x) = \frac{x^v}{1+x^v}$, $x \in (0, 1)$, $v \in \mathbb{N}$ Έχουμε δει ότι $f_v \xrightarrow{p.o.} 0$ στο $(0, 1)$.Έστω $\varepsilon > 0$ και $\varepsilon < 1/2$

$$N_\varepsilon(x) = \min \{ p : v \geq p \Rightarrow |f_v(x) - f(x)| < \varepsilon \} =$$

$$= \min \{ p, v \geq p \Rightarrow \frac{x^v}{1+x^v} < \varepsilon \}$$

$$\text{Όμως, για } x \in (0, 1): \frac{x^v}{1+x^v} < \varepsilon \Rightarrow x^v < \varepsilon(1+x^v) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-\varepsilon)x^v < \varepsilon \Rightarrow x^v < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \neq 0 \Rightarrow v \log x < \log \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v > \frac{\log \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}{\log x}, \text{ Πάιρω } N_\varepsilon(x) = \left[\frac{\log \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}{\log x} \right] + 1$$

 $\log \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$ ανεξάρτητη ποσότητα από το x και $\log \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} < 0$ Αν $f(x) = \frac{\log \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}{\log x}$, $f'(x) > 0$. Εφόσον $\lim_{x \rightarrow 1^-} \log x = 0$, έχω

$$\sup \{ N_\varepsilon(x) : x \in (0,1) \} = +\infty$$

Άρα, η σύγκλιση στο $(0,1)$ δεν είναι ομοιόμορφη.

Αν $y \in (0,1)$ και $\forall y = (y/2, \frac{y+1}{2})$, τότε:

$$\sup \{ N_\varepsilon(x) : \forall y \in A \} = \left\lceil \frac{\log(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon})}{\log(\frac{y+1}{2})} \right\rceil + 1 < +\infty$$

Πρόταση: Έστω $f \in F(A, \mathbb{R})$ και $(f_n) \in F(A, \mathbb{R})$, ώστε:
 $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο A και για κάποια $(x_n) \in A$
 ισχύει ότι $\lim f(x_n)$ υπάρχει στο $\widehat{\mathbb{R}}$, τότε:
 $\liminf f_n(x_n)$ υπάρχει και παρόμοια $\liminf f_n(x_n) = \lim f(x_n)$

Απόδειξη

Έστω $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο A και έστω επίσης $\lim f(x_n) = l$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

i) $l \in \mathbb{R}$, ii) $l = +\infty$, iii) $l = -\infty$

• Έστω ότι $l \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$, λόγω του ότι $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα ισχύει
 $(\exists N_1 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq N_1) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$ ①

Ακόμα αφού $\lim f(x_n) = l$

$(\exists N_2 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq N_2) \Rightarrow |f(x_n) - l| < \varepsilon/2$

Επιλέξω ως $N_0 = \max \{ N_1, N_2 \}$: $(\forall n \geq N_0)$.

$$|f_n(x_n) - l| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - l| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \lim f_n(x_n) = l$$

• Αν $l = +\infty$: $(\exists N_3 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq N_3) f(x_n) > \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon$. Άρα

για $N_0^* = \max \{ N_1, N_3 \}$ έχουμε:

$$f_n(x_n) = f_n(x_n) - f(x_n) + f(x_n) \geq -|f_n(x_n) - f(x_n)| + f(x_n) \stackrel{①}{\geq} > -\frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \liminf f_n(x_n) = +\infty$$

• Αν $l = -\infty$: $(\exists N_4 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq N_4) : f(x_n) < -\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon$. Οπότε:

αν $N_0' = \max \{ N_1, N_4 \}$, $n \geq N_0'$

$$f_n(x_n) = f_n(x_n) - f(x_n) + f(x_n) \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + f(x_n) \stackrel{①}{\leq} -\frac{1}{\varepsilon}$$

Ασκ
Έστω $f_n(x) = x^n \sin \frac{1}{1-x}$, $x \in (0,1)$. Να εξετάσει ως προς ομ. σύγκλιση

Λύση
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ (πυθαινική φραγή)

Αρα, αν $f(x) = 0$, $x \in (0,1)$, $f_n \xrightarrow{κσ} f$ στο $(0,1)$.
Όπως, αν (x_n) : $\frac{1}{1-x_n} = 2n\pi \Rightarrow x_n = 1 - \frac{1}{2n\pi}$, τότε:

$$f_n(x_n) = \left(1 - \frac{1}{2n\pi}\right)^n \cdot \sin 2n\pi = 0.$$

Αν (y_n) : $\frac{1}{1-y_n} = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow y_n = 1 - \frac{1}{2n\pi + \pi/2}$ τότε

$$f_n(y_n) = \left(1 - \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right)^n \cdot \sin(2n\pi + \pi/2) = \left(1 - \frac{1}{2n\pi + \pi/2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2n\pi + \pi/2}\right)^{-n}} = \frac{1}{\left[\left(1 - \frac{1}{2n\pi + \pi/2}\right)^{-(2n\pi + \pi/2)}\right]^{\frac{1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2n\pi + \pi/2}\right)^{-1/4}}}$$

$$\text{Αρα } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y_n) = \frac{1}{e^{1/2\pi}} \cdot 1 = e^{-1/2\pi}$$

Αν $\omega_n = \begin{cases} x_n, & n \text{ περιζωός} \\ y_n, & n \text{ άρζωός} \end{cases}$

τότε $f(\omega_n) = 0, \forall n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\omega_n) = 0$, αλλά

$f_{2k+1}(\omega_{2k+1}) = 0$, ενώ $f_{2k}(\omega_{2k}) = f_{2k}(y_{2k})$ και
 $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{2k}(y_{2k}) = e^{-1/2\pi}$
 Τελικά, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega_n)$ δεν υπάρχει.

Έτσι, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη, στο $(0,1)$.

Κριτήριο

• Αν $f_n \xrightarrow{κ.σ.} f$ και για κάποια $(x_n) \subseteq A$ ισχύει ότι $\lim f(x_n)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ (και $\lim f(x_n) = l \notin \mathbb{R}$) ενώ το όριο της $f_n(x_n)$ δεν υπάρχει ή υπάρχει και είναι διάφορο του l , τότε η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο A .

Ασκ

Έστω $f_n(x) = \frac{n \cdot x^5 + n^4 x^2 + n^5 x}{n^6 + x^6}$, $x \in [0, +\infty)$. Να εξεταστεί

ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση

Λύση

• Αν $x=0$: $f_n(x)=0, \forall n \in \mathbb{N}$.

• Αν $x \in (0, +\infty)$: $\lim_n f_n(x) = \lim_n \frac{n^5}{n^6} = 0$

Άρα, αν $f(x)=0, \forall x \in [0, +\infty)$ έχουμε: $f_n \xrightarrow{κ.σ.} f$

Έστω, $x_n = \frac{1}{n}$, $(x_n) \subseteq [0, +\infty)$ και $f(x_n) = 0$. Οπότε:

$$\lim_n f_n(x_n) = 0. \text{ Όμως, } f_n(x_n) = \frac{3n^6}{2n^6} = \frac{3}{2}$$

Άρα, $\lim_n f_n(x_n) = \frac{3}{2} \neq 0 = \lim_n f(x_n) \Rightarrow$ Σύμφωνα με το

κριτήριο η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

Ασκ

Έστω $f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1-nx)^2}$, $x \in [0, 1]$. Να εξεταστεί ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση.

Λύση

• Αν $x=0$: $f_n(x)=0, \forall n \in \mathbb{N}$

• Αν $x \in (0, 1]$: $\lim_n f_n(x) = 0$. Οπότε, αν $f(x)=0, \forall x \in [0, 1]$

τότε $f_n \xrightarrow{κ.σ.} f$ στο $[0, 1]$.

Έστω $x_n = \frac{1}{n}$, $(x_n) \subseteq [0, 1]$ και $f(x_n) = 0 \Rightarrow \lim_n f(x_n) = 0$

Όμως, $f_n(x_n) = 1 \Rightarrow \lim_n f_n(x_n) = 1 \neq 0 = \lim_n f(x_n)$.

Οπότε, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

Πρόταση : Έστω $(f_n) \in F(A, \mathbb{R})$ και $f \in F(A, \mathbb{R})$, $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο A . Αν γ σ.σ. του A και υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim_{x \rightarrow \gamma} f_n(x)$ και $\lim_{x \rightarrow \gamma} f(x) =: C \in \mathbb{R}$, τότε :

υπάρχει $\lim_n C_n$ στο $\mathbb{R}$ και το $\lim_{x \rightarrow \gamma} f(x)$ στο $\mathbb{R}$, με

$$\lim_n C_n = \lim_{x \rightarrow \gamma} f(x)$$

$$[\text{Δηλαδή } \lim_n \lim_{x \rightarrow \gamma} f_n(x) = \lim_n C_n = \lim_{x \rightarrow \gamma} f(x) = \lim_{x \rightarrow \gamma} \lim_n f_n(x)]$$

Απόδειξη

$f_n \rightarrow f$ ομ/φα στο A : $(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n \geq n_0, \forall x \in A$
 Έστω $(x_p) \in A$ με $x_p \rightarrow \gamma$ (υπάρχει διότι γ σ.σ.)
 Τότε για κάποιο n (σταθερό) με $n \geq n_0$:
 $\lim_p f_n(x_p) = C_n$ (διότι $\lim_{x \rightarrow \gamma} f_n(x) = C_n$)

$$\text{Για } \forall p, k \in \mathbb{N} \text{ έχω: } |f(x_p) - f(x_k)| \leq |f(x_p) - f_n(x_p) + f_n(x_p) - f_n(x_k) + f_n(x_k) - f(x_k)| \leq |f(x_p) - f_n(x_p)| + |f_n(x_p) - f_n(x_k)| + |f_n(x_k) - f(x_k)| < 2\varepsilon + |f_n(x_p) - f_n(x_k)| \quad (*)$$

Όπως για το σταθερό n που αναφέραμε:

$(f_n(x_p))_p$ είναι ακολουθία στο $\mathbb{R}$ και εφόσον $x_p \rightarrow \gamma$ και $\lim_{x \rightarrow \gamma} f_n(x) = C_n \in \mathbb{R}$, έπεται ότι η $(f_n(x_p))_p$ είναι συγκλίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Άρα, είναι και βασική ως συγκλίνουσα $\Rightarrow \exists p_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|f_n(x_p) - f_n(x_k)| < \varepsilon, \forall p, k \geq p_0$. Οπότε από $(*)$ παίρνω: $|f(x_p) - f(x_k)| < \varepsilon, \forall p, k \geq p_0 \Rightarrow$ Η ακολουθία $(f(x_p))_p$ είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$ και $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ πλήρης $\Rightarrow (f(x_p))_p$ συγκλίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Έστω ότι $\lim_p f(x_p) = l \Rightarrow (\exists p_1 \in \mathbb{N}) (\forall p \geq p_1) \Rightarrow |f(x_p) - l| < \varepsilon$
 Επίσης, αφού $\lim_{x \rightarrow \gamma} f_n(x) = C_n$ (και $x_p \rightarrow \gamma$), έπεται ότι:

$$(\exists p_2 \in \mathbb{N}) (\forall p \geq p_2) : |f_n(x_p) - C_n| < \varepsilon.$$

Έστω τώρα $p_3 := \max\{p_1, p_2\}$.

~~Παρατήρηση~~ Αφού $f_n \rightarrow f$ οπ/φα στο A , $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)$:

$|f_n(x_{p_3}) - f(x_{p_3})| < \varepsilon$. Συνεπώς, για $n \geq n_0$:

$$|G_n - l| = |G_n - f_n(x_{p_3}) + f_n(x_{p_3}) - f(x_{p_3}) + f(x_{p_3}) - l| \leq$$

$$\leq |G_n - f_n(x_{p_3})| + |f_n(x_{p_3}) - f(x_{p_3})| + |f(x_{p_3}) - l| < 3\varepsilon$$

Αρα, για $n \geq n_0$: $|G_n - l| < 3\varepsilon$. ①

Έστω $(y_p) \subseteq A$ με $y_p \rightarrow \gamma$, τότε όπως και πριν η $(f(x_p))_p$ είναι βασική στο $\mathbb{R}$ και αφού $\mathbb{R}$ πλήρης το $\lim_p f(y_p)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$. Έστω $\lim_p f(y_p) = l^*$

Με την ίδια διαδικασία αποδεικνύεται ότι για $n \geq n_0$ ισχύει:

$$|G_n - l^*| < 3\varepsilon$$

Έστω ότι $l \neq l^*$ και έστω $\delta = \frac{1}{6}|l - l^*| > 0$

Έστω $\varepsilon > 0$ και $\varepsilon < \delta$. Για αυτό το ε ικανοποιούνται ① και ②

Οπότε: $|l^* - l| \leq |l^* - G_{n_0}| + |G_{n_0} - l| < 6\varepsilon < |l - l^*|$. Άρα, Από:

Αρα, $\lim_{x \rightarrow \gamma} f(x)$ υπάρχει και ισχύει $\lim_{x \rightarrow \gamma} f(x) = l$ ③

Αλλά από ①: $\lim G_n = l$ ④

$$\text{③, ④: } \lim_{x \rightarrow \gamma} f(x) = \lim G_n$$

Παρατηρήσεις

① Στην περίπτωση που $A \subseteq \mathbb{R}$ και το γ ή $-\infty$ είναι στο $\text{cl } A$, τότε η προηγούμενη πρόταση ισχύει βάζοντας στη θέση του $\lim_{x \rightarrow \gamma} f$ το $\lim_{x \rightarrow \infty} f$ ή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f$

② Εάν $A = \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ η προηγούμενη πρόταση μπορεί να ισχύει αν η γενική συνάρτηση f αντικατασταθεί με μια ακολουθία a_p και αντί για $f_n(x_p)$ να έχουμε μια ακολουθία δύο δεικνών $a_{p,q}$.